Vorlesungsplan für Vorlesungen auf Grundlage des Lehrbuchs:

W. Högele, *Aufbruch in die Angewandte Mathematik: Vom Verständnis zum praktischen Werkzeug*, Springer Spektrum 2026

Dieser Vorlesungsplan ist ein Vorschlag aus der Lehre des Autors.
Konkrete Instanzen der Vorlesungen können natürlich einzelne Einheiten überspringen oder alternativ rekombinieren, sodass es in den konkreten Lehrbetrieb passt. Zu jeder Lehreinheit wird eine begleitende Übungs-, Praktikums- oder Projektstunde empfohlen.

Vorlesung 1: Mehrdimensionale Differentialrechnung und Differentialgleichungen

basierend auf Buchkapitel 1: Konzepte der Höheren Mathematik

Wiederholung | 1.1–1.2 Mehrdim. Funktionen & Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ | 1.3 Gewöhnliche Dgln | 1.4 Integralbegriff

Einheit	Buchabschnitt	Inhalt
E 1	1.1.1	Wiederholung Analysis und Lineare Algebra (Auffrischung Vorwissen und Einordnung)
E 2	1.1.2	Mehrdimensionale Funktionen und ihre Klassifikation (Kurve, Funktional, Vektorfeld), offene Mengen im $\mathbb{R}^n$, Grenzwert, Stetigkeit, Funktionsverknüpfungen
E 3	1.2.1.1	Differenzierbarkeit: Definition, totale Differenzierbarkeit und totales Differential, (stetige) partielle Ableitungen, Jacobi-Matrix, affin-lineare Abbildung
E 4	1.2.1.2	Gradient und Richtungsableitung bei Funktionalen, Produktregel für Gradienten, Niveaulinien/-mengen
E 5	1.2.2	Mehrdimensionale Kettenregel: Kurven in Funktionalen, allgemeiner Fall im $\mathbb{R}^n$, Koordinatenschreibweise
E 6	1.2.3	Höhere Ableitungen, Satz von Schwarz, Hesse-Matrix und quadratisches Polynom
E 7	1.2.4.1–2	Anwendung: Tangentialebene und Tangentialparaboloid, Normale auf Funktion, Taylorformeln mit Restfehler
E 8	1.2.4.3–4	Anwendung: Optimalitätsbedingungen im $\mathbb{R}^n$ (Definitheit von Matrizen, Eigenwerte, Hauptminoren, Sattelpunkt), Lagrange-Multiplikator
E 9	1.2.4.5–6, 1.2.5	Anwendung: Gradientenabstieg (Learning rate, Rosenbrock-Funktion, Fluch der Dimensionen), Backpropagation in ANNs mit stochastischem Gradientenabstieg, Ausblick
E 10	1.3.1	Explizite gewöhnliche Differentialgleichungen und -systeme: Definition, Anfangs- und Randwertproblem (AWP/RWP), Richtungsfelder
E 11	1.3.2	Allgemeine Lösungstheorie (Lösungsintervall, Kipppunkt) und Beispiele, Näherungslösung durch Euler-Polygonzug am SI-Modell
E 12	1.3.3	Lineare Dgln (homogene und inhomogene Lösung), Beispiel: freie und angeregte Schwingungen als Dgl 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten
E 13	1.3.4–5	Methode der getrennten Variablen, Ausblick auf partielle Differentialgleichungen (PDE)
E 14	1.4	Anmerkungen zur Erweiterung des Integralbegriffs: vom Riemann- zum Lebesgue-Integral, iterierte Integration, Transformationssatz, Divergenzsatz/Integralsatz von Gauß

Vorlesung 2: Approximationstheorie und Variationsrechnung

basierend auf Buchkapitel 2: Optimierung auf Funktionenräumen

2.1 Vorbereitung 2.2 Approximationstheorie 2.3 Variationsrechnung 2.4 Fixpunktsatz

Einheit	Buchabschnitt	Inhalt
E 1	2.1	Wiederholung und Vorbereitung: Vektorraum, Unterraum, Norm, Skalarprodukt, Orthogonalität, Cauchy-Schwarz-Ungleichung, Parallelogrammgleichung, Funktionenräume (u. a. L^2), Funktionale
E 2	2.2.1, 2.2.2.1–4	Ziel der Approximationstheorie, Bestapproximation, allgemeiner Projektionssatz, Normalengleichungen und Gram-Matrix, Orthogonalbasen, kleinste Fehlerquadratsumme
E 3	2.2.2.5, 2.2.3	Unendlich-dimensionale Unterräume (ONS/ONB, Besselsche Ungleichung, Parsevalsche Gleichung), trigonometrische Polynome, Fourierreihe
E 4	2.2.4.1–2	Orthogonale Polynome, Gram-Schmidt-Verfahren auf Funktionenräumen, Legendre-Polynome
E 5	2.2.4.3, 2.2.5	Tschebyscheff-Polynome, B-Splines
E 6	2.2.6	Mehrdimensionale Approximation mit Produkt-Basen aus eindimensionalen Basen, Universalapproximation durch ANNs
E 7	2.2.7–8	Verwendung von Funktionen-Basen, Ritz-Ansatz, Ausblick (konvexe Mengen, strikt konvexe Normen, Vollständigkeit, Hilbertraum)
E 8	2.3.1	Einführungsbeispiele (Kürzeste-Distanz-Problem, Brachistochrone, Kettenlinie/Katenoide), Fundamentallemma der Variationsrechnung
E 9	2.3.2	Euler-Lagrange-Dgl, fixe Ränder ohne Nebenbedingungen
E 10	2.3.3.1	Varianten der Euler-Lagrange-Dgl I, mit Gleichheitsnebenbedingungen, Lagrange-Multiplikator
E 11	2.3.3.2	Varianten der Euler-Lagrange-Dgl II, mehrere Funktionen, parametrische Variationsprobleme, Geodäsie
E 12	2.3.3.3–4	Varianten der Euler-Lagrange-Dgl III, bewegliche Ränder und natürliche Randbedingungen, höhere Ableitungen
E 13	2.3.4–5	Varianten der Euler-Lagrange-Dgl IV, mehrdimensional (PDE) mit Divergenzsatz, Minimalflächen, Ausblick auf das Prinzip der kleinsten Wirkung
E 14	2.4	Iterationsgleichungen und der Banachsche Fixpunktsatz: kontrahierende Abbildung, Vervollständigung, Anwendungen auf Gradientenabstieg und Funktionenräume

Vorlesung 3: Integraltransformationen

basierend auf Buchkapitel 3: Integraltransformationen für Signalverarbeitung und Systemtheorie

3.1 Allgemeine Einführung 3.2 Signale & Fouriertransformation

3.3–3.4 Systemtheorie 3.5 Anwendungen

Einheit	Buchabschnitt	Inhalt
E 1	3.1	Allgemeine Einführung am Beispiel Audiosignale, Vorlesungskonzept (Fahrplan der Transformationen), mathematische Grundlagen: komplexe Zahlen, Eulersche Formel
E 2	3.2.1, 3.2.2.1	Klassifizierung von Signalen, Fourierreihe (analog, periodisch) in komplexer und Betrags-/Phasen-Darstellung, Pulsreihe, Sägezahnreihe, sinc-Funktion
E 3	3.2.2.2	Herleitung CTFT (analog, nicht-periodisch), Spektrum und Betragsspektrum, Rechteckpuls, Gauß-Funktion
E 4	3.2.2.3–4	Einschübe: kontinuierliche Faltung, Delta-Impuls mit Ausblendeigenschaft, Sprungfunktion/Heaviside-Funktion
E 5	3.2.2.5–7	Eigenschaften der CTFT (Dualität, Zeit-/Frequenzskalierung, Faltungssatz), Signaldauer-Bandbreite-Produkt und Unschärferelation, Übersicht Fouriertransformierte
E 6	3.2.3.1–2	Herleitung DTFT mit Delta-Kamm und periodischem Spektrum, Abtasttheorem für bandbegrenzte Signale, Aliasing, Rekonstruktion von Signalen
E 7	3.2.3.3	Herleitung DFT, Zusammenhang Zeit-/Spektralabtastung, diskrete Spektralanalyse, Blocklänge, Unschärferelation der DFT
E 8	3.2.3.4–5	Handlungsanweisung DFT, Beispiele DFT: Leakage- und Aliasing-Effekt, Fensterung (Hanning-/Blackman-Window), Zero-padding, FFT
E 9	3.2.3.6–7	Einschub: diskrete Faltung, Eigenschaften DFT (Faltungssatz, spektrales Zoomen)
E 10	3.3.1	Einführung Systemtheorie: Eigenschaften von Systemen (Linearität, Zeitinvarianz, Kausalität, Stabilität), LTI-Systeme mit Impuls- und Schrittantwort, Grundarten von Filtern
E 11	3.3.2.1–2	Analoge LTI-Systeme: elektrische Schaltungen (Bauelemente, Kirchhoffsche Regeln, RC-Glied) als Differentialgleichungen, Herleitung LT
E 12	3.3.2.3–6	Eigenschaften LT, Übersicht LT, Übertragungsfunktion und Frequenzgang (Amplituden-/Phasengang), Schrittantwort im Bildbereich, Bode-Darstellung und PN-Diagramm, Kombination von Systemen
E 13	3.3.3.1–3	Diskrete LTI-Systeme: Schema digitaler Systeme (A/D- und D/A-Wandler), Differenzengleichungen und Blockdiagramme, Impulsantwort FIR/IIR
E 14	3.3.3.4–6	Einführung ZT, Eigenschaften ZT, Übersicht ZT, Übertragungsfunktion und Frequenzgang, PN-Diagramm
E 15	3.4	Digitale Signale und Systeme: Quantisierung (Bittiefe, Wortlänge, Quantisierungsfehler), SNR in Dezibel, Datenübertragungsrate
E 16	3.5.1–3	Rauschunterdrückung mit der DFT (Filter), elementare Bildverarbeitung mit der 2D-Fouriertransformation, schematische Beispiele aus dem Alltag
E 17	3.5.4–5	STFT/Spektrogramme (Fensterung, Unschärferelation der DFT), Elemente der Antennen-, Modulations- und Funktechnik mit elektrischen Schwingkreisen
E 18	3.5.6	Radon-Transformation und Sinogramm, 2D CTFT, Fourier-Slice-Theorem, CT-Rekonstruktion durch gefilterte Rückprojektion (Filtered Back-Projection)

Vorlesung 4: Modellbildung und Simulation

basierend auf Buchkapitel 4: Praxis der Modellbildung und Simulation

4.1 Einführung und Begriffe | 4.2 Modell vs. Daten | 4.3.1–4.3.2 Deterministische Modelle (Dgln)
4.3.3 Stochastische Modelle (Monte-Carlo) | 4.3.4–4.3.5 Diskrete Modelle, Komplexität und Chaos

Einheit	Buchabschnitt	Inhalt
E 1	4.1.1–3	Einführung Begriffe I: Verortung in einer Pseudo-Historie, Modelle sind Abbildungen, Modellklassifikation
E 2	4.1.4	Einführung Begriffe II: Simulation (Vorwärtssimulation, Verifikation und Validierung, Berechenbarkeit), inverse und gut/schlecht gestellte Probleme, Regularisierung, grundlegende Ideen des Model-Fittings
E 3	4.2.1, 4.2.2.1–2	Einordnung Data Science, lineare Modelle (affin-linear), nichtlineare Modelle (z. B. quadratisches Polynom)
E 4	4.2.2.3, 4.2.3, 4.2.3.1 (1. Teil)	Lokale Linearisierung (Jacobi-Matrix, Taylorformel), Model-Fitting mit Zielfunktion und Optimierer, Linearer Model-Fit via Least-Squares I
E 5	4.2.3.1 (2. Teil)	Linearer Model-Fit II: Normalengleichungen, Gram-Matrix, lineare Unabhängigkeit
E 6	4.2.3.2 (1. Teil)	Nichtlinearer Model-Fit I: Gradientenabstieg, Gauß-Newton- und Newton-Verfahren, alternative Zielfunktionen (Manhattan-Norm, Median, Maximum Likelihood)
E 7	4.2.3.2 (2. Teil)–4.2.3.4	Nichtlinearer Model-Fit II, Modellauswahl durch Model-Fit (Overfitting, Trainings-Testdaten-Split, Bestimmtheitskoeffizient), Anwendungsfall ANNs (Aktivierungsfunktion, stochastischer Gradientenabstieg, Generalisierung, Fluch der Dimensionen)
E 8	4.3.1, 4.3.2.1	Einordnung Scientific Computing, Darstellung von ODEs (AWP und RWP) und ODE-Solver
E 9	4.3.2.2	Populationsmodelle: Räuber-Beute-Modelle (Lotka-Volterra), logistisches Wachstum, SI-Modell
E 10	4.3.2.3	Dreikörper-Problem: Herleitung des ODE-Systems durch Newtonsches Gravitationsgesetz, Lagrange-Punkte
E 11	4.3.2.4	Simulation von PDEs am Beispiel der Wärmeleitungsgleichung: Randbedingungen, Finite-Differenzen-Methode (FDM), Finite-Elemente-Methode (FEM) mit Triangulierung und Ritz-Ansatz
E 12	4.3.3.1	Monte-Carlo, Pseudo-Zufallszahlen (Inversions-, Acceptance-Rejection-Methode), Statistik-Werkzeuge (Erwartungswert, Varianz, Quantil, MSE/RMS, Kovarianzmatrix, Bias-Variance-Tradeoff)
E 13	4.3.3.2	Auslegung eines Positionsmesssystems: Objektlokalisierung mit Lateration und Angulation
E 14	4.3.3.3	Wahlsimulation als retrospektive Studie von US-Präsidentschaftswahlen
E 15	4.3.3.4–6	Sensitivitätsanalyse an RDEs, Brown'sche Bewegung und Random Walk, Simulation von SDEs (Euler-Maruyama-Verfahren), Attraktor
E 16	4.3.4.1–3 (1. Teil)	Grundbegriffe zellulärer Automaten, Verkehrssimulation (Nagel-Schreckenberg-Modell), Beispiele in 2D: Gebäudeschutz, Infektionskrankheit
E 17	4.3.4.3 (2. Teil), 4.3.4.4	Beispiele in 2D (Fortsetzung): Game of Life, Discrete Event Simulation (DES) mit Future Event List (FEL), Graphen, Bottle-Neck
E 18	4.3.5	Ein Warnschuss: Komplexität und Chaos im Einfachsten (Wolfram's Rules, logistisches Wachstum, Feigenbaum-Diagramm, Attraktor, Selbstähnlichkeit)